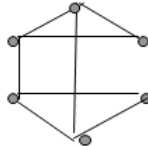


## NOCIONES BÁSICAS DE GRAFOS

14) Disponemos de 6 ordenadores y 9 cables de conexión. Queremos que cada ordenador se conecte con otros 3 ordenadores. ¿Existe alguna forma de conectarlos? ¿Es única?

**Solución**

Los vértices son los 6 ordenadores y las aristas son los 9 cables de conexión.  $\text{card } V = 6$   $\text{card } A = 9$   
 Si cada ordenador se conecta con otros 3 ordenadores, entonces el grado de cada vértice es 3 y se verifica la expresión  $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \text{ card } A$ .



15) Una empresa adquiere una red de ordenadores. Cada ordenador se conecta con, a lo sumo, cinco ordenadores y el número total de conexiones es 40. ¿Qué puedes decir del número de ordenadores que se han comprado?

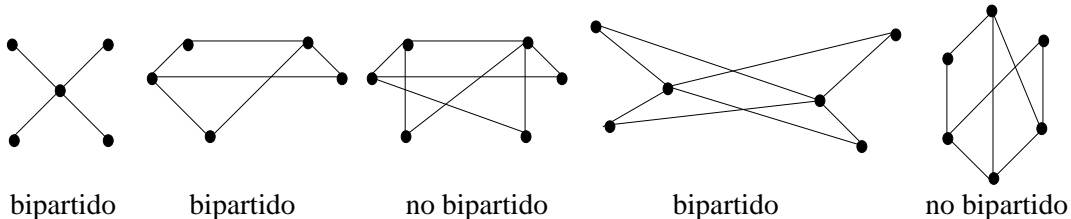
**Solución**

Los vértices son los ordenadores que se han comprado y las aristas son los 40 cables de conexión, entonces  $\text{card } A = 40$ .

Si cada ordenador se conecta con, a lo sumo, 5 ordenadores, entonces el grado de cada vértice es menor o igual que 5 y se verifica la expresión

$$5 \text{ card } V \geq \sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \text{ card } A = 80 \Rightarrow \text{card } V \geq 16$$

16) Determinar cuáles de los siguientes grafos son bipartidos:

**Solución**

19) Estudiar si las siguientes sucesiones son gráficas:

- a) 3,3,3,3,2      b) 1,2,3,4,4      c) 3,4,3,4,3      d) 5,5,4,4,3,3,3,1,0,0  
 e) 3,3,2,2,2,2,1,1      f) 6,4,4,4,3,3,3,3      g) 5,3,3,3,2,2,1,1

En caso afirmativo, obtener una representación gráfica.

**Solución**

- a) 3, 3, 3, 3, 2  
 2, 2, 2, 2  
 1, 1, 2  
 2, 1, 1  
 0, 0  
 Es gráfica
- b) 1, 2, 3, 4, 4  
 4, 4, 3, 2, 1  
 3, 2, 1, 0  
 1, 0, -1  
 No es gráfica
- c) 3, 4, 3, 4, 3  
 No es gráfica, hay 3 vértices con grado impar

d) 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 0, 0  
 4, 3, 3, 2, 2, 3, 1, 0, 0  
 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 0, 0  
 2, 2, 2, 1, 2, 1, 0, 0  
 2, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0  
 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0  
 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0  
 0, 0, 1, 1, 0, 0  
 1, 1, 0, 0, 0, 0  
 0, 0, 0, 0, 0

Es gráfica

e) 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1  
 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1  
 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 0, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 0  
 0, 1, 1, 0  
 1, 1, 0, 0  
 0, 0, 0

Es gráfica

f) 6, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3  
 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3  
 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2  
 2, 2, 2, 2, 2, 2  
 1, 1, 2, 2, 2  
 2, 2, 2, 1, 1  
 1, 1, 1, 1  
 0, 1, 1  
 1, 1, 0  
 0, 0

Es gráfica

g) 5, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1  
 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 0, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 0  
 0, 1, 1, 0  
 1, 1, 0, 0  
 0, 0, 0

Es gráfica

20) Sea  $S$  una familia de subconjuntos de un conjunto  $A$ . El grafo de intersección para  $S$  tiene un vértice por cada miembro de  $S$ , y dos vértices son adyacentes si sus correspondientes subconjuntos tienen intersección no vacía.

- a) Construir el grafo de intersección de la familia de todos los subconjuntos de  $\{a, b, c\}$   
 b) Construir el grafo de intersección de la familia de todos los subconjuntos de  $\{a, b, c, d\}$

### Solución

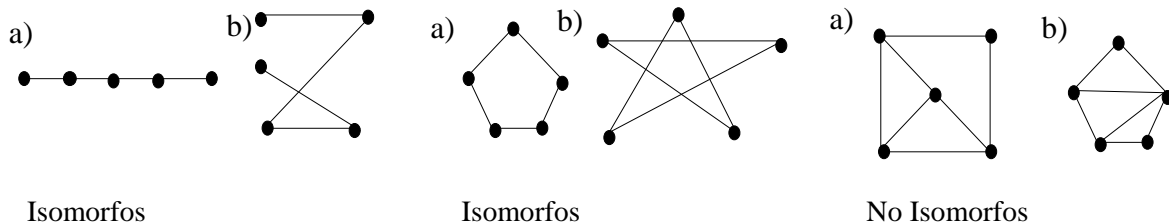
a)  $A = \{a, b, c\}$

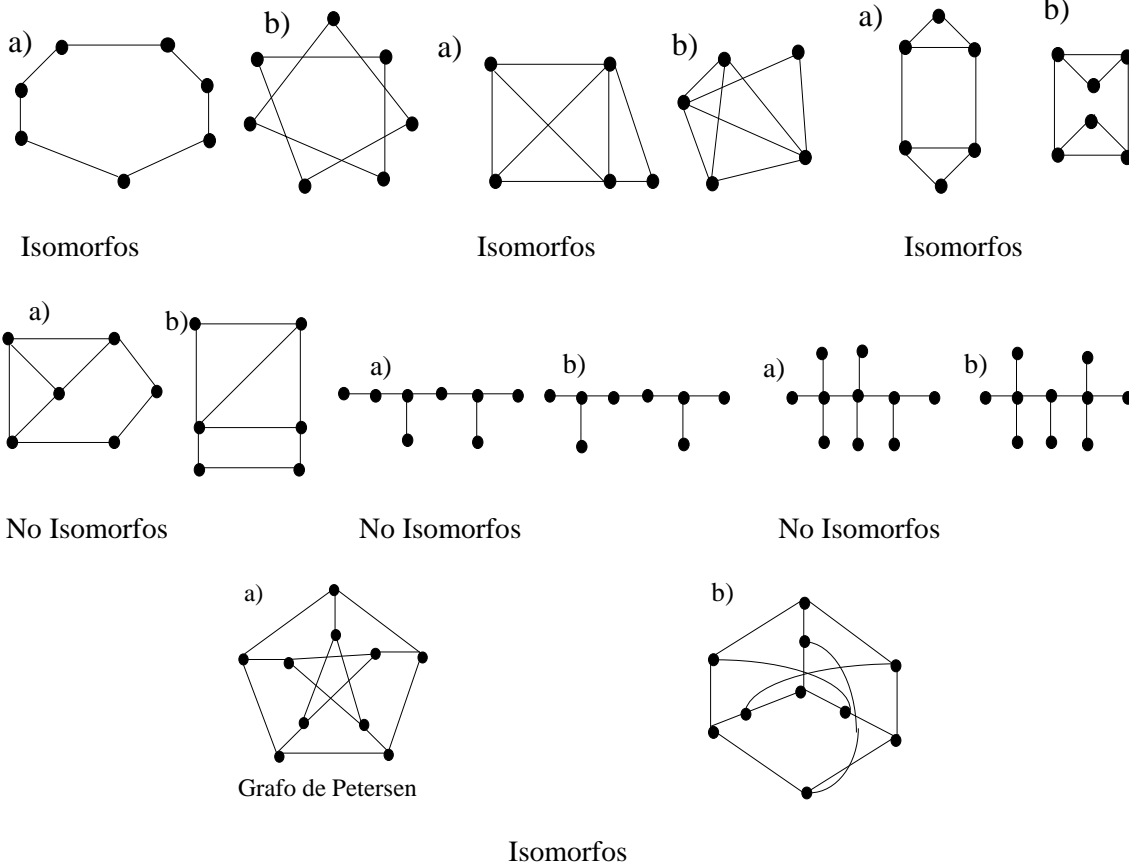
$S = \{v_1 = \emptyset, v_2 = \{a\}, v_3 = \{b\}, v_4 = \{c\}, v_5 = \{a, b\}, v_6 = \{a, c\}, v_7 = \{b, c\}, v_8 = \{a, b, c\}\}$  es el conjunto de vértices

$E = \{\{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_7\}, \{v_3, v_8\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}, \{v_4, v_8\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_5, v_8\}, \{v_6, v_7\}, \{v_6, v_8\}, \{v_7, v_8\}\}$  es el conjunto de aristas

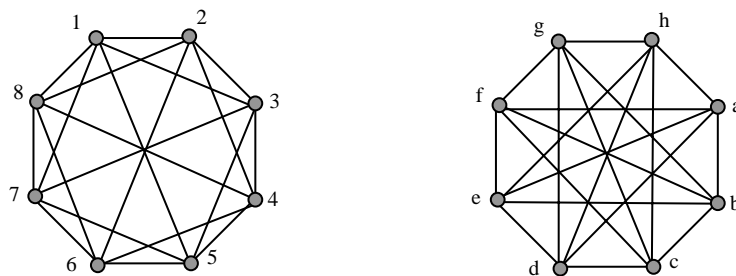
26) Determinar cuáles de los siguientes pares de grafos son isomorfos:

### Solución





- 28) Sea  $G = (V, A)$  un grafo simple y  $\bar{G} = (V, A^*)$  su grafo complementario. Se pide:
- Si  $G$  tiene  $n$  vértices y  $q$  aristas, ¿cuántos vértices y aristas tiene su complementario?
  - Justificar si son, o no son, isomorfos los grafos de la figura:



**Solución:**

- $\text{card } A^* = \binom{n}{2} - q$
- Hallamos los complementarios de ambos grafos

1	2	3	4	5	6	7	8
4	5	6	1	2	1	2	3
6	7	8	7	8	3	4	5

a	b	c	d	e	f	g	h
c	d	a	b	c	d	a	b
g	h	e	f	g	h	e	f

El complementario del 1º grafo es un ciclo de longitud 8:  $C = \{1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 1\}$

El complementario del 2º grafo no es conexo, son dos ciclos de longitud 4:  $C_1 = \{a, c, e, g\}$ ,  $C_2 = \{b, d, f, h\}$

29) Hallar el complementario de  $C_4$ ,  $C_5$  y el grafo de Petersen. ¿Son regulares?

**Solución:**

El complementario de  $C_4$ , tiene  $n = 4$  vértices de grado 1 y  $q = 2$  aristas.

El complementario de  $C_5$  es  $C_5$

El complementario del grafo de Petersen tiene  $n = 10$  vértices de grado 6.